Physique Générale : Mécanique

05.02:

Contraintes géométriques, points d'équilibre, stabilité

Sections
SC, GC & SIE , BA1

Version du 27.8.2023

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Aujourd'hui

- Coordonnées généralisées
- Liaisons, forces de contraintes
- Nombre de degrés de liberté
- Pendule simple
- Pendule double
- Points d'équilibre
- Stabilité
- Glissière hémisphérique
  - Forces de contraintes
  - Points d'équilibre relatifs
  - Stabilité des points d'équilibre

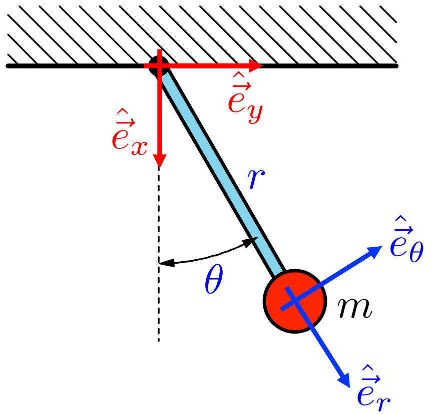
- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

Définition: **Coordonnées généralisées**
Ensemble de nombres $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ tel que la donnée des $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ et du temps t décrit de manière univoque la configuration d'un système mécanique..

Exemples:

- 1 point matériel: $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$
- Pendule: Point matériel de masse m relié à un point fixe par un fil souple sans masse. Mouvement contraint dans le plan, pas de frottements

$$(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$$
$$(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, z)$$

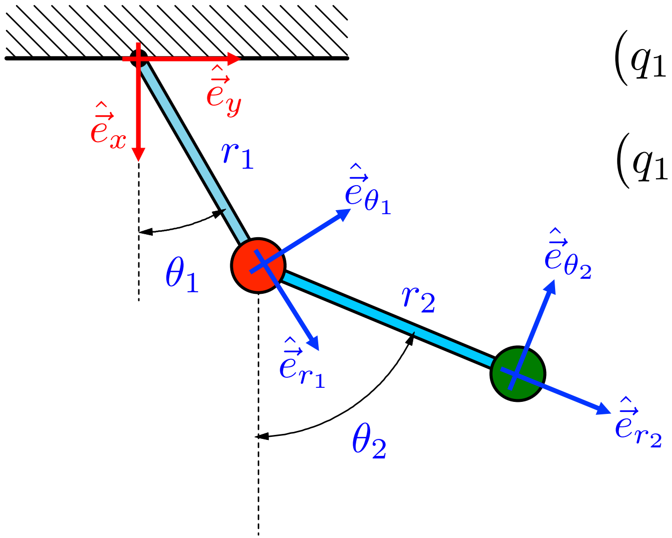


Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Exemples:

- Pendule double: Pendule relié à un pendule par un fil souple.



$$\left(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\right) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

$$\left(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\right) = (r_1, \theta_1, z_1, r_2, \theta_2, z_2)$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Liaisons, Forces de contraintes [mooc 9.1]

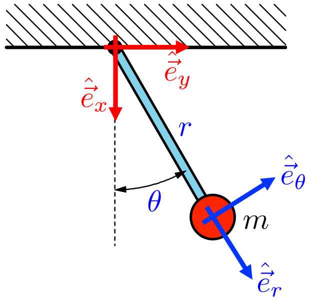
Définition: **Liaison**
Condition (ou contrainte) à laquelle un système est soumis, et qui limite le mouvement de celui-ci.

Définition: **Force de contrainte, ou de liaison**
On admet qu'il est possible de remplacer les liaisons par des forces qui s'adaptent naturellement, de sorte que la contrainte soit toujours satisfaite.

Notes:

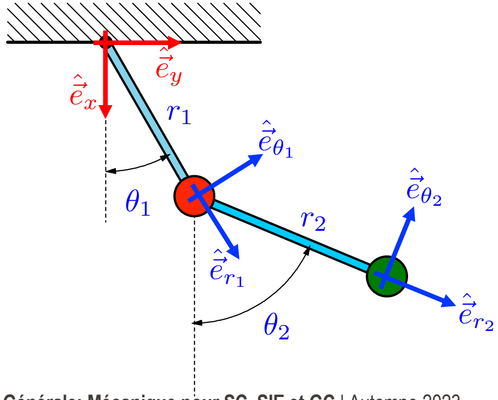
- Une force de liaison est parallèle à la direction qui est contrainte (ex: cube sur une table ou sur un plan incliné, tension dans un pendule)
- L'effet des liaisons est de contraindre le mouvement, et donc de diminuer le nombre de degrés de liberté de celui-ci. Nous nous limitons ici à des liaisons qui s'expriment sous forme d'égalités.

Définition: Nombre de degrés de liberté
Un système est dit (holonôme) à k degrés de liberté si il peut être décrit par k coordonnées $(q_1, q_2, ..., q_k)$ telles que les variables $\{q_i, \dot{q}_i\}$ sont indépendantes les unes des autres.



(x, y, z) x et y ne sont pas indépendantes, z est nul.
(r, θ, z) r est fixe, z est nul. Si θ est connu, l'état du système est connu:

1 degré de liberté



Si θ_1 et θ_2 sont connus, l'état du système est connu:

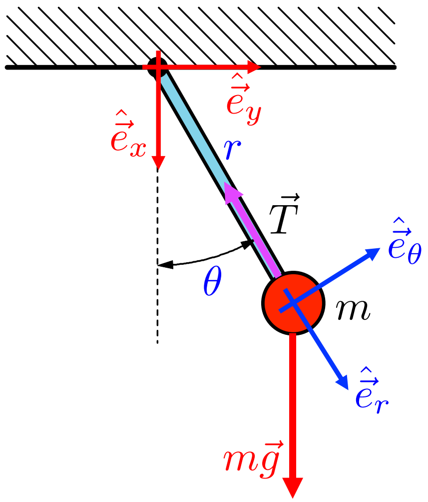
2 degrés de liberté.

Faculté
des sciences
de base

Swiss
Plasma
Center

Pendule simple:

- L'état est entièrement déterminé par la connaissance de x, y et z
- Liaisons:
  1. Coord cart: $\sqrt{x^2+y^2} = l = \text{cste}$ Coord. Polaires: $r = l = \text{cste}$
  2. Mouvement plan: $z = 0$



- Forces de contrainte:
  1. Tension dans le fil: $\vec{T}$
  2. Force au point d' attache. Parallèle à z, sans intérêt ici
- Nombre de degrés de liberté:

3 grandeurs - 2 liaisons = 1 degré de liberté

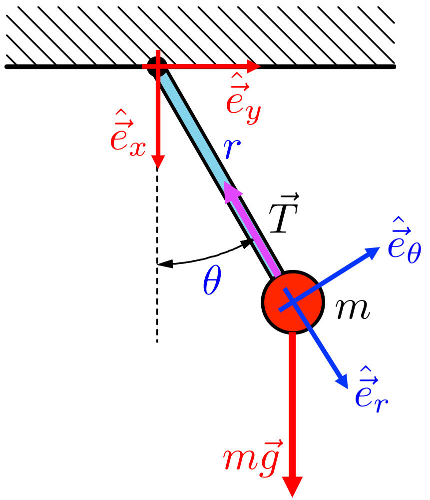
Résolution des équations du mouvement, pendule mathématique

En coordonnées cartésiennes (démarche compliquée et déconseillée)

- Bilan des forces sur m et seconde loi de Newton: $m\vec{a}_m = m\vec{g} + \vec{T}$

$$\begin{aligned} \text{Selon } x: \quad m\ddot{x} &= mg - T\cos\theta \\ \text{Selon } y: \quad m\ddot{y} &= -T\sin\theta \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = l = \text{cste}$$

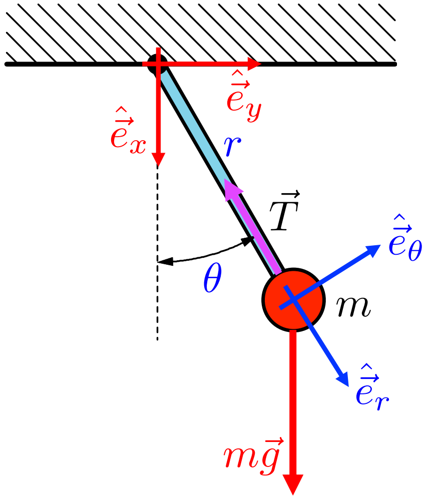


- En principe, on peut utiliser la contrainte pour exprimer y en fonction de x, puis y’’ en fonction de x, x’ et x’’.
- En remplaçant dans la seconde équation, on exprime alors T(x,x’,x’’) et on remplace dans la première.
- On a donc bien une seule équation à résoudre.
- La démarche est compliquée et inélégante.

Résolution des équations du mouvement, pendule mathématique

On se place en coordonnées polaires (démarche élégante et conseillée)

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta}_{r = l, \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0} \quad = -l\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + +l\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$



- On projette Newton selon r et θ:

$$\begin{aligned} \text{Selon } \vec{e}_r : \quad & -ml\dot{\theta}^2 &=& \; mg\cos\theta - T \\ \text{Selon } \vec{e}_\theta : \quad & ml\ddot{\theta} &=& \; -mg\sin\theta \end{aligned}$$

- Pour θ petit: $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

Oscillateur harmonique de période

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Indépendante de la masse m !

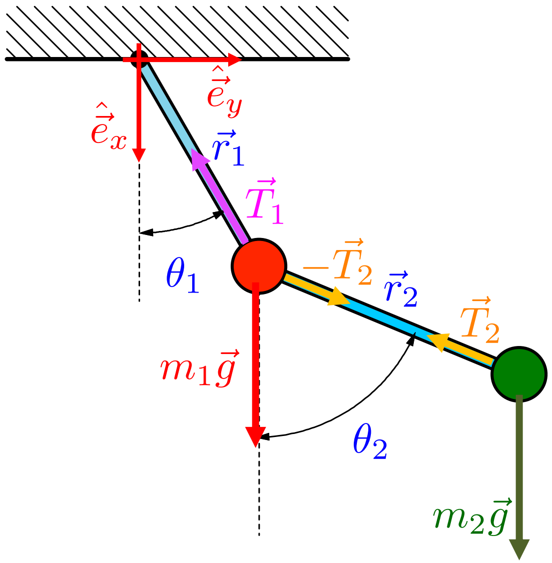
Pendule double:

- Liaisons:
  - Coordonnées cartésiennes

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sqrt{x_1^2+y_1^2} & = & l_1 = \mathrm{cste} \\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} & = & l_2 = \mathrm{cste}\end{array}\right.$$

  - Coordonnées généralisées

$$r_1 = l_1 = \mathrm{cste} \quad , \quad r_2 = l_2 = \mathrm{cste}, \quad z_1 = z_2 = 0$$



- Forces de contraintes (cas de fils souples):
  - $\vec{T}_2, \vec{T}_1$+ 2 forces en z aux points d'attache (sans intérêt)
- Nombre de degrés de liberté:
  6 grandeurs - 4 liaisons = 2 degrés de liberté
- L'état du pendule est déterminé si on connaît deux grandeurs ((θ_1,θ_2) ou (x_1,x_2), ou (y_1,y_2))

<u>Définition:</u> **Points d'équilibre**
Un système à k degrés de liberté décrit par les coordonnées généralisées $(q_1, q_2, ..., q_k)$ est à l'équilibre au point $(q_{1_0}, q_{2_0}, ..., q_{k_0})$ si

$$(q_1(t), q_2(t), ..., q_k(t)) = (q_{1_0}, q_{2_0}, ..., q_{k_0}) = \text{cste}$$

est une solution des équations du mouvement.

On détermine les points d'équilibre à partir des équations du mouvement en posant:

$$\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0, \quad i = 1, .., k$$

<u>Exemple:</u> pendule simple

Système à 1 degré de liberté, $q_1 = \theta$ Equation du mouvement: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

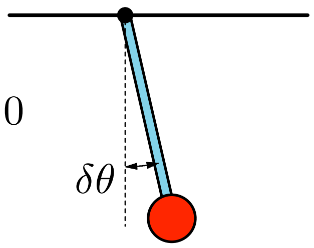
Equilibre: $\ddot{\theta} = 0 \implies -\frac{g}{l}\sin\theta_{\text{eq}} = 0 \implies \theta_{\text{eq}} = \{0, \pi\}$

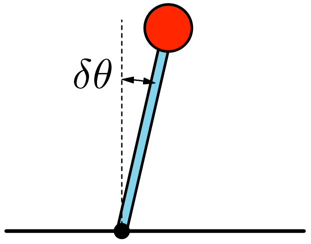
Stabilité des points d'équilibre

Définition: Stabilité des points d'équilibre
Un point d'équilibre $(q_{1_0}, q_{2_0}, ..., q_{k_0})$ est dit stable si l'évolution du système tend à le ramener vers cette même position lorsqu'on lui applique une perturbation. Dans le cas contraire, le point est dit instable.

Exemple: pendule simple

$\theta_{\mathrm{eq}} = 0$





$\theta_{\mathrm{eq}} = \pi$

Si on applique une perturbation $\delta\theta$ autour de $\theta_{\mathrm{eq}} = 0$ le pendule a tendance à revenir à sa position d'équilibre.

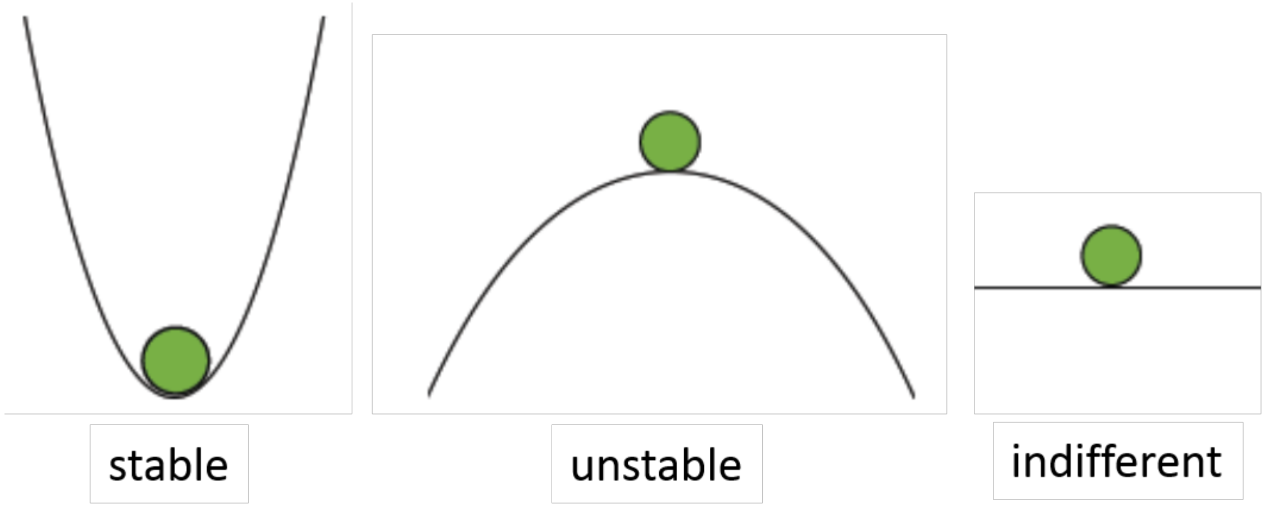
→ équilibre stable

Si on applique une perturbation autour de $\theta_{\mathrm{eq}} = \pi$ le pendule a tendance à s'éloigner de sa position d'équilibre.

→ équilibre instable

Stabilité des points d'équilibre

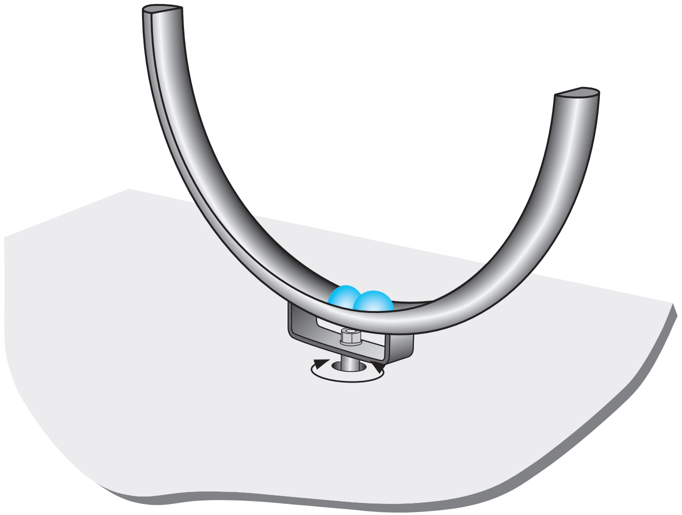
- Analogie avec un bille sur une surface concave, convexe ou plate:

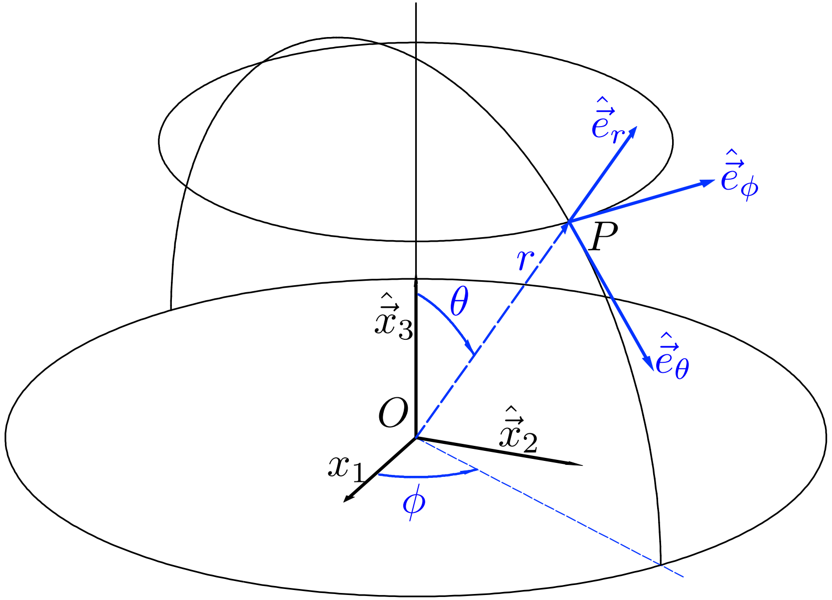


Autre exemple: Glissière hémisphérique

[mooc25.exp]

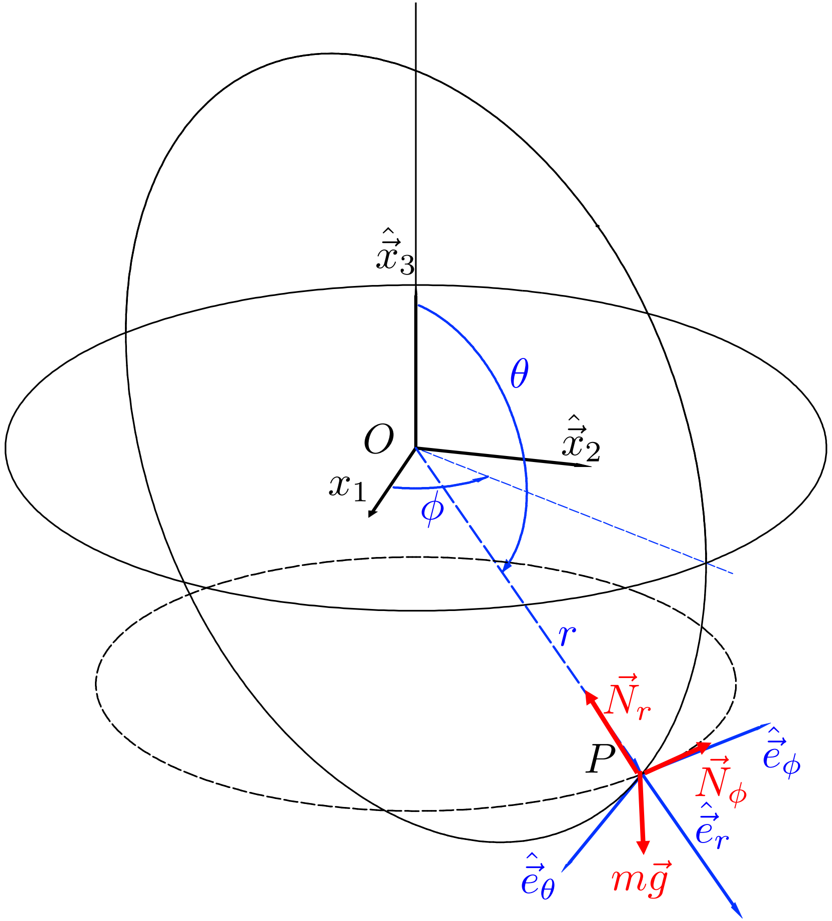
- Hypothèses:
  - Modèle: La bille glisse sans frottement dans la glissière
  - La glissière tourne autour de l'axe $\hat{\vec{x}}_3$ à vitesse angulaire constante
  - On cherche les forces de contraintes et les positions d'équilibre





- On utilise les coordonnées sphériques en prenant soin de définir θ=0 de manière cohérente avec la définition originale.

Autre exemple: Glissière hémisphérique



- Contraintes:
  - Le mouvement de la bille est contraint selon $\hat{\vec{e}}_r$ et $\hat{\vec{e}}_\phi$

$$r = R = \text{cste}$$
$$\phi = \omega t, \quad \dot{\phi} = \omega$$

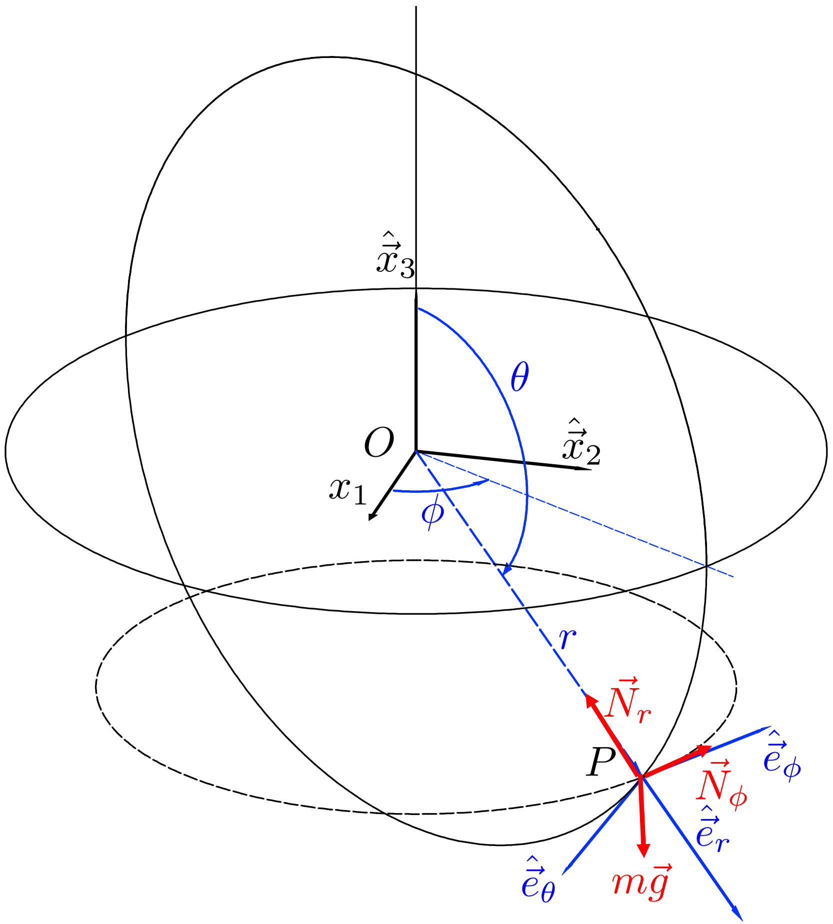
  - On a donc un mouvement à **1 degré de liberté**, naturellement décrit par la coordonnée généralisée θ
  - On introduit des forces de contrainte en rapport:

$$N_r\,\hat{\vec{e}}_r \qquad N_\phi\,\hat{\vec{e}}_\phi$$

  - La seule autre force est le poids de la bille:

$$m\vec{g}$$

Autre exemple: Glissière hémisphérique



- Accélération en coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\vec{e}}_r \\ &+\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\hat{\vec{e}}_\theta \\ &+\left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\right)\hat{\vec{e}}_\phi\end{aligned}$$

- Avec les contraintes, l'accélération devient:

$$\begin{aligned}\vec{a}_r &= \left(-R\dot{\theta}^2 - R\omega^2\sin^2\theta\right)\hat{\vec{e}}_r \\ \vec{a}_\theta &= \left(R\ddot{\theta} - R\omega^2\cos\theta\sin\theta\right)\hat{\vec{e}}_\theta \\ \vec{a}_\phi &= \left(2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\vec{e}}_\phi\end{aligned}$$

Autre exemple: Glissière hémisphérique: équations

- On peut donc écrire la seconde loi de Newton projetée sur les trois axes:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Selon } \hat{\vec{e}}_r : & m\left(-R\dot{\theta}^2 - R\omega^2\sin^2\theta\right) & = & -mg\cos\theta - N_r \\
\text{Selon } \hat{\vec{e}}_\theta : & m\left(R\ddot{\theta} - R\omega^2\cos\theta\sin\theta\right) & = & mg\sin\theta \\
\text{Selon } \hat{\vec{e}}_\phi : & m\left(2R\omega\dot{\theta}\cos\theta\right) & = & N_\phi
\end{array}
$$

- Connus: R, ω
- Inconnues: $\theta(t)$ N_r, N_ϕ

- En principe, on peut intégrer la seconde équation pour trouver $\theta(t)$ et remplacer dans les autres pour trouver N_r, N_ϕ

Autre exemple: Glissière hémisphérique: points d'équilibre

- Plutôt que d'intégrer les équations, nous allons nous intéresser aux positions d'équilibre, et analyser leur stabilité en imposant des petites perturbations autour de celles-ci.

- L'équation de Newton selon la coordonnée θ se réécrit:

$$\left(\ddot{\theta} - \omega^2 \cos\theta \sin\theta\right) = \frac{g}{R} \sin\theta$$

- Les équilibres (relatifs) sont définis par

$$\theta = \theta_e = \mathrm{cst} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_e \sin\theta_e = -\frac{g}{\omega^2 R} \sin\theta_e$$

- Il y a 3 points d'équilibre:

$\theta_e = 0$ La bille est au sommet de la glissière

$\theta_e = \pi$ La bille est au fond de la glissière

$\cos\theta_e = -\dfrac{g}{\omega^2 R}$ La bille est à un certain angle par rapport à la verticale

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Autre exemple: Glissière hémisphérique: stabilité des points d'équilibre

- Remarque: le troisième point d'équilibre n'existe que sous la condition

$$|\cos\theta_e| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \omega \geq \omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

- La stabilité des points d'équilibre s'analyse en appliquant des petites perturbations autour d'un point d'équilibre.

  Si la force subie par la bille lorsqu'on perturbe sa position la ramène vers le point d'équilibre, alors on dit que le point d'équilibre est stable. Si au contraire la force l'éloigne du point d'équilibre, alors celui-ci est instable.

Autre exemple: Glissière hémisphérique: stabilité des points d'équilibre

- Pour déterminer si un point d'équilibre est stable ou instable, on pose

$$\theta = \theta_e + \delta\theta \qquad \text{avec} \qquad \delta\theta \ll 1 : \text{perturbation}$$

- on remplace dans l'équation du mouvement,
- on développe autour du point d'équilibre
- On compare les signes de $\delta\ddot{\theta}$ et $\delta\theta$:
  - Si $\delta\ddot{\theta}$ et $\delta\theta$ sont de même signe -> point d'équilibre **instable**
  - Si $\delta\ddot{\theta}$ et $\delta\theta$ sont de signes opposés -> point d'équilibre **stable**

- En effectuant le remplacement il vient:

$$\left(\ddot{\theta} - \omega^2 \cos\theta \sin\theta\right) = \frac{g}{R} \sin\theta$$

$$\underbrace{\ddot{\theta}_e}_{=0} + \delta\ddot{\theta} - \omega^2 \cos(\theta_e + \delta\theta)\sin(\theta_e + \delta\theta) = \frac{g}{R}\sin(\theta_e + \delta\theta)$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Autre exemple: Glissière hémisphérique: stabilité des pointsd'équilibre

- Stabilité du point d'équilibre $\theta_e = 0$
  Développements limités à l'ordre 1 autour de $\theta_e = 0$:

  $\cos(\theta_e + \delta\theta) \approx 1 \qquad \sin(\theta_e + \delta\theta) \approx \delta\theta$

  en remplaçant et en regroupant:

  $$\ddot{\delta\theta} = \underbrace{\left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)}_{>0} \delta\theta$$

- $\ddot{\delta\theta}$ et $\delta\theta$ ont le même signe : Point d'équilibre instable

Autre exemple: Glissière hémisphérique: stabilité des pointsd'équilibre

- Stabilité du point d'équilibre $\theta_e = \pi$

$\cos(\pi + \delta\theta) \approx -1 \qquad \sin(\pi + \delta\theta) \approx -\delta\theta$

en remplaçant et en regroupant:

$$\delta\ddot{\theta} = \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)\delta\theta$$

- La stabilité du point d'équilibre dépend de ω

$\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ Point d'équilibre stable

$\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ Point d'équilibre instable

En dessous d'une certaine fréquence angulaire de rotation, le point d'équilibre situé tout en bas de la glissière est stable, puis il devient instable si on augmente ω

Autre exemple: Glissière hémisphérique: stabilité des pointsd'équilibre

- Stabilité du point d'équilibre $\cos\theta_e = -\frac{g}{\omega^2 R}$

$$\cos(\theta_e + \delta\theta) \approx \cos(\theta_e) - \sin(\theta_e)\delta\theta$$

$$\sin(\theta_e + \delta\theta) \approx \sin(\theta_e) + \cos(\theta_e)\delta\theta$$

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathcal{O}\left((x - x_0)^2\right)$$

en remplaçant, en regroupant et en utilisant $\frac{g}{R} = -\omega^2\cos(\theta_e)$:

$$\delta\ddot{\theta} - \omega^2\left[\cos(\theta_e) - \sin(\theta_e)\delta\theta\right]\left[\sin(\theta_e) + \cos(\theta_e)\delta\theta\right] = \frac{g}{R}\left[\sin(\theta_e) + \cos(\theta_e)\delta\theta\right]$$

$$\boxed{\delta\ddot{\theta} = -\omega^2\sin^2(\theta_e)\,\delta\theta}$$

- Le point d'équilibre est toujours stable !

- L'équation ci-dessus est celle d'un **oscillateur harmonique**!

Pour des petites perturbations, la bille oscille autour de sa position d'équilibre avec une fréquence angulaire $\omega\sin(\theta_e)$

Résumé:

- On appelle coordonnées généralisées tout ensemble de variables qui, avec le temps t, permettent de décrire de manière univoque la configuration du système.

- Les liaisons auxquelles un système est astreint se traduisent par des forces de contraintes.

- L'effet des forces de contraintes est de restreindre le nombre de degrés de liberté du système d'autant d'unités.

- Le nombre de degrés de liberté d'un système correspond au nombre de coordonnées généralisées indépendantes qu'il faut pour décrire l'état du système de manière univoque.

Résumé (2):

- Les points d'équilibre d'un système sont définis par

$$\big(q_1(t), q_2(t), ..., q_k(t)\big) = \big(q_{1_0}, q_{2_0}, ..., q_{k_0}\big) = \text{cste}$$

  et déterminés en posant

$$\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0, \quad i = 1, .., k$$

  dans les équations du mouvement.

- La stabilité des points d'équilibre s'analyse en imposant des petites perturbations (δq) autour d'un point d'équilibre, en linéarisant les équation du mouvement, et en comparant les signes des termes de force ($\ddot{\delta q}$) et de perturbation (δq).
  Si les deux termes sont de signes opposés, le point d'équilibre est stable. Si ils sont de même signe, le point d'équilibre est instable.

- Au voisinage d'un point d'équilibre stable, le mouvement peut être approximé au premier ordre par un oscillateur harmonique.

$$\ddot{\delta\theta} - \omega^2 \sin(\theta_e)\cos(\theta_e) + \omega^2 \delta\theta \sin^2(\theta_e) - \omega^2 \delta\theta \cos^2(\theta_e) + \omega^2 \delta\theta^2 \cos(\theta_e)\sin(\theta_e) = \frac{g}{R}\sin(\theta_e) + \frac{g}{R}\delta\theta\cos(\theta_e)$$